77. 不動点定理に就て

佐藤 徳意

談話57にて野水氏は J. Schauder 及び A. Tychonoff の不動点定理を拡張した形で得られ linia topologia spaco でこの定理が成立つことにその様注意してあるのを見ないやうに思ふと述べられたが、これは既に私達のところで研究してあり（但し整理した論文の形では発表してなし）、かかる定理の成立すべき空間もほゞ決定したことを明かにし、合せてこの形の定理で一番落付くべきものを述べたいと思ふ。（これ等は東京で本年5月に行はれた日本数学会年会の"不動点定理に就て"なる私の講演で言及してあり、中間報告として昨年12月16日日本数学会函数方程式分科会及び上記年会の講演並に雑誌 La Funkciolaj Ekva

cioj Vol. 1 N-Yo 1, 2 (このニつを夫々[1], [2]として引用す) に発表した
微分方程式の研究に於て最も使ひ易い定理は次の Schauder の定理であつた。
定理. Hを Banach 空間に於ける凸閉集合とする。函数 $f(x)$ はHで連続で、$f(H)$ がHに含まれ且つ Kompakta ならば、少くとも一つ不動点が存在する。"

併し私は楕円型偏微分方程式 $\Delta Z = f(x, y, z, p, q)$ の Dirichlet 問題の研究に於てこの定理を利用しようとしたが、うまく進展せず、もつと一般な空間で成立せしめる必要に迫られた。 他方福原先生は常微分方程式の特異点の研究に於ても Banach 空間より一般な空間に於ける不動点定理の拡張の必要を感じて居られ、はじめは互に他が研究して居ることを知らず、殆んど同一方針の下に研究を進めて居たのである。

即ち

I) 空間として線型位相空間を目標とし、出来るだけ少い條件の空間を決定しそこに於て不動点定理を述べること であつた。 次に私にとつて問題であつたことは、

II 函数方程式の研究に於て函数族を抽象空間として考へ 不動点定理を抽象空間の概念を媒介にして述べるが、直接函数族に関する概念のみにて述べる形にしたらどうか。

必ず利用に都合のよいものを得られるであらうと予想した。

以下 I), II) の各々に就て現在までに得られた結果を述べよう。

I) に就ては本年の数学会年会の講演で明かなやうに 到達して居た結果は野水氏の定理であり、更にその拡張の可能性があることを述べた。尤も野水氏は記述を簡単にするためか linear topological space や Compact に就て説明がないため、 極意的に云へば定理の成立ぬ例は既に J. Schauder に依つて与へられたともいはれるが、かゝる形の定理として現在最も一般的な形で述べたものである。但し少し補足的説明の必要があるかと思ふ。即ち metric の場合に於ける証明から推察して基本演算加法に関して連続且つ λx は (λ は実数、x は空間の点) λ 及び x の函数と

して連結な *linear topological space* をとつてゐる. (これは後に説明するやうに私達が上述の方針の下に進んで必然的に到達した空間である).
次に *Compact* は *metric space* の場合の証明で閉ぢてゐる性質を使つてゐるから *bicompact* を意味してゐる. (前に述べた *Schauder* の定理に於ける *compact* は *bicompact* を意味せず. これが応用上使ひ易い形である所以. 以上の補充の下で定理は成立つ. 前に述べたやうに *J. Schauder* が *linia metrica spaco* で不動点定理の成立たぬ例を *Stud. Math.* 2 (1930) で挙げてゐる. ここで彼の意味してゐる *linia metrica spaco* では $x+y$, λx の連続性は仮定されてゐない。 これ等の性質は公理 1), 2), 3) として空間に導入されてゐる。彼の公理から $x+y$, λx の連続性の出ること並に公理間の関係については [1] を参照され度い。公理 1), 2), 3) は彼の *Lemo* (野水氏の *Lemo* と同一) を証明する途中の段階に於て必要とする性質をその際とつたやうに思はれる (但し厳密な論証法を読者に任すとて証明はなし). 次に *A. Tychonoff* は *Math. Ann.* 111 (1935) に於て *linia topologia spaco* で不動点定理を証明してゐるが. この場合の *linia topologia spaco* とは *linia Hausdorff-a spaco* で基本演算加法及び乗法に関して連続と断つてあり, 次の定理の証明で λx は λ 及び x の函数として連続なることを使つてゐる. (今後特に断らぬ限り *linia topologia spaco* をこゝで説明した意味で用ふ).

Tychonoff の定理 *Linia topologia spaco* R が n ケの基を有するならば, 即ち R の各点が $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ の形で唯一つの仕方で表されるならば, R は n 次元 *Eŭklid-a spaco* に *linie homeomorfa* である.

なほ *Tychonoff* の不動点定理で注意すべきことは空間が更に *lokale konveksa* であると仮定してゐる. 今日から見れば. これは証明の手段として必要であつて, 何等本質的な條件でないのである. 先づ *Schauder* の定理 (今後 *Schauder* の定理と云ふときは *Stud. Math* 2 にある *Theorem* 1 であつて, 始めに挙げた *Schauder* の定理と呼んだものを指

さず(この定理は Theorem 2 となつてゐる)) の証明に必要な本質的部分は lemo であると思ふ その証明を分析すれば,

(A) 任意の整数 $n(\geq 2)$ 及び任意の $\varepsilon(>0)$ に対して次のやうな $\delta=\delta(n,\varepsilon)$ が存在する. $x_1, x_2, \cdots x_n \in R$ を $\rho(x_i,\theta)<\delta\ (i=1,2,\cdots,n)$ なるやうにとれば $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ \lambda_i\geq 0$ なる任意の $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ に対し $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ は $\rho(x,\theta)<\varepsilon$ を満足する。

(B) $\rho(a,b)=\rho(a-b,\theta)$ が成立する.

となり, Tychonoff の不動点定理の lokala konvekseco は(A)と近い関係にあるが lokale なる topologio を入れた概念と konveksa なる topologio を入れないですむ概念を使用してゐるため應用上不便を感ずる. 又 Tychnoff の定理は空間は一般化されてゐるが Schauder の定理をその特殊の場合として含むことが出来ない。

研究を始めた時の私は lokala konvekseco は空間の或る本質的性質の一面に触れて居ると感じ, (A) と lokala konvekseco を同時に含む概念として lokale preskaŭ konveksa なる概念を[1]で導入し 出来るだけ仮定の少い空間で不動点定理を求めやうとしたのである. 併し上記の Tychonoff の定理を使用したため加法及び λx は λ 及び x の函数として連続なることを仮定してゐる.

福原先生も同様な方針で次の條件を満足する一次 D 空間で不動点定理を得られた([1]を参照)

i) λx は λ, x の各々に関して連續.

ii) 局部的に凸.

さて [1] で注意したやうに加法に関して連続群なる場合 λx が $0\leq\lambda\leq 1$ で一様連續なことから lokala preskaŭ konovekseco を結論出来るが逆に lokala preskaŭ konvekseco から λ が任意の有限閉区間に属するとき λx が一様連續なることが結論出来る([2]の定理 1 を参照, この定理は上記福原先生の結果が動機であつた) 從つて λx は λ 及び x の連續函数となる。然るに λx が λ 及び x の函数として連續ならば, λ が有界閉区間に属すれば λx

が一様に連続なることが容易に結論出来，これから（A）が出る訳である。

ここまで注意すれば[1]で述べた定理Aに於ける *lokale preskaŭ konveksa* なる仮定は過剰な条件でこれを落しても定理が成立つことの証明は繰返す必要が全くない。従つて得られた定理を整理して再録すれば，

定理 "Hを *linia topologia spaco* に於ける凸集合とし，$y=f(x)$ をHをそれ自身に写す連続写像とする。もし $f(H)\subseteq K\subseteq H$ なる *bikompakta* な集合Kが存在するならば，少くとも一つ不動点が存在する。"

野水氏の定理は述べ方がこれより少し狭いが大差なく，従つて，この定理の証明が二つ得られたことになる訳である。尤も氏の証明では一般の場合に於ける補助定理に就て説明がないが，

更にこの定理の一般化が可能であつて，これに就いて年会の講演で触れたところをもう一度述べよう。

私は *linia topologia spaco* に於て[II]の定理2を用ひて *Leray-Schauder* 流の写像度を定義することが出来，それに依つて次の定理を得て居る。（未発表）

定理 "Hを *linia topologia spaco* に於ける有界（*Banach*の意味で）閉集合とし，その一点に関して星型とする。$y=f(x)$ は $\bar{H}$ をそれ自身に写す連続写像とし $f(H)$ が *bikompakta* ならば少くとも一つ不動点が存在する。"

この定理からHが有界閉集合なる条件がとれないかと云ふことを注意した。当時既に私達のところでは[I]の方向の研究ではこれが問題であつたのである。（続く）

(1947. 12. 11)